Anleitung – Hessesche Normalform (HNF)

Eine Ebene im Raum kann auf unterschiedliche Arten eindeutig beschrieben werden. Neben der Parametergleichung kann sie durch die Angabe eines Punktes A und eines auf ihr senkrecht stehenden Vektors $\vec{n}$ angegeben werden. Für jeden Punkt X der Ebene gilt dann:

$\vec{n} * \overrightarrow{OX} = d$ mit $d = \vec{n} * \overrightarrow{OA}$ sowie $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{n} * \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{n} * \overrightarrow{OX} - \vec{n} * \overrightarrow{OA} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - d = 0$

$\Leftrightarrow \quad a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d = 0$

verschiedene Schreibweisen für ein und dieselbe Ebene

Ist der Normalenvektor normiert, d.h. er hat die Länge 1, so spricht man von der Hesseschen Normalform (HNF).

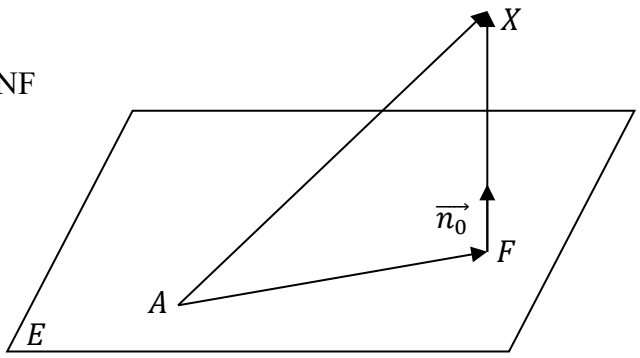
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_0} * \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} * \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

weitere Schreibweisen der HNF sind möglich

Setzt man auf der linken Seite in die Gleichung einer Ebene E, die in Hessescher Normalform vorliegt, die Koordinaten eines beliebigen Punktes X ein, so erhält man bis auf das Vorzeichen den Abstand des Punktes X von der Ebene E.



$\frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ | linke Seite der HNF

$= \quad \overrightarrow{n_0} * \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right)$ | $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$

$= \quad \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{AX}$ | $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FX}$

$= \quad \overrightarrow{n_0} * \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FX}\right)$ | Termumformung

$= \quad \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{FX}$ | $\overrightarrow{n_0} \perp \overrightarrow{AF}$

$= \quad 0 + \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{FX}$ | $\overrightarrow{FX}$ ist Vielfaches von $\overrightarrow{n_0}$, nämlich $\overrightarrow{FX} = \overrightarrow{n_0} \cdot Abst(X, E)$,

$= \quad \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{n_0} \cdot Abst(X, E)$ | $\overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{n_0} = 1$

$= \quad Abst(X, E)$

Gegeben ist die Ebene E durch $2x - 3y + 5z = 3$ sowie der Punkt $P(1|2|3)$. Wie weit ist der Punkt P von der Ebene E entfernt?

1. Umwandeln der Ebenengleichung in HNF: $\frac{2x - 3y + 5z - 3}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} = 0$
2. Links die Punktkoordinaten einsetzen: $\frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 3}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}}$
3. Ausrechnen… $\frac{2 - 6 + 15 - 3}{\sqrt{4 + 9 + 25}} = \frac{8}{\sqrt{38}} \approx 1{,}3$

Schiemenz - www.hyperschlau.de