Anleitung – Skalarprodukt

Berechnung

Das Skalarprodukt oder innere Produkt $\vec{a} * \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ weist diesen beiden Vektoren eine reelle Zahl zu. Es gilt:

$\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

und

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\, \varphi$, wobei φ der Winkel ist, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen.

Eigenschaften

Die skalare Multiplikation erfüllt das Kommutativgesetz, es gilt $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$.

Die skalare Multiplikation erfüllt das Distributivgesetz, es gilt $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}$.

Die skalare Multiplikation erfüllt nicht das Assoziativgesetz. Während $\vec{a} \cdot (\vec{b} * \vec{c})$ ein Vektor in Richtung von $\vec{a}$ ist, hat $(\vec{a} * \vec{b}) \cdot \vec{c}$ die Richtung von $\vec{c}$.

Geometrischer Nutzen

Das Skalarprodukt $\vec{a} * \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist genau dann null, wenn diese beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sind die Vektoren orthogonal zueinander?

$\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Mithilfe der zweiten Definitionsgleichung lassen sich Winkel zwischen Vektoren berechnen.

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$cos\, \varphi = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \cdot \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}} = \frac{(-2) \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 7^2 + (-3)^2}} \approx -0{,}323 \Rightarrow \varphi \approx 109°$

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Bestimmen Sie r, so dass das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} 2 \\ r \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ r \end{pmatrix}$ den Wert 4 annimmt.

3. Berechnen Sie die Seitenlängen und die Innenwinkel des Dreiecks ABC.
   a) $A(2|3|0)$, $B(-1|10|-4)$, $C(-2|0|7)$
   b) $A(8|0|0)$, $B(-6|0|7)$, $C(6|15|-4)$

Schiemenz - www.hyperschlau.de