Anleitung – Vektorprodukt

Berechnung

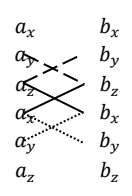
Das Vektorprodukt oder äußere Produkt oder Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ weist diesen beiden Vektoren einen Vektor zu. Es gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

und

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\,\varphi$, wobei φ der Winkel ist, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen.

Tipp zum Formelmerken



Notiere die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zweimal untereinander. Multipliziere die Komponenten der Zeile 2 mit den Komponenten der Zeile 3. Verfahre ebenso mit den Komponenten der Zeilen 3 und 4 sowie 4 und 5. Ändere das Vorzeichen der drei Produkte, bei denen der Strich von links nach rechts ansteigt. Fasse die beiden Produkte des obersten Kreuzes zur ersten Komponente des Kreuzproduktes zusammen. Fasse die Produkte der beiden anderen Kreuze zur zweiten bzw. dritten Komponente des Kreuzproduktes zusammen.

Eigenschaften

Das Vektorprodukt erfüllt das Kommutativgesetz nicht, es gilt jedoch $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Das Vektorprodukt erfüllt das Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Geometrischer Nutzen

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander, so ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Nullvektor. Ansonsten ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor, der senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und mit ihnen in der Reihenfolge $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bildet.

Der Betrag des Vektorprodukts $|\vec{a} \times \vec{b}|$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich der Maßzahl der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Wie groß ist die Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \approx 5{,}4$$

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{w}$, der senkrecht auf $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht.
2. Zeigen Sie mithilfe des Kreuzproduktes, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, das durch die Punkte $A(0|2|1)$, $B(-2|4|1)$ und $C(1|0|3)$ gebildet wird, 3 FE beträgt.

Schiemenz - www.hyperschlau.de