

Anleitung – Integration durch Substitution, Kettenintegration

Viele Funktionen lassen sich nicht unmittelbar integrieren, z. B.

$$\int (2x + 1) (x^2 + x + 3)^4 dx$$

Eine geeignete, wenn auch sehr aufwändige Methode wäre hier das Auflösen der Klammern und Integrieren der resultierenden ganzrationalen Funktion. Das Berechnen eines Integrals lässt sich oft deutlich vereinfachen, wenn im Integranden eine verkettete Funktion und ihre innere Ableitung vorkommt. Den entscheidenden Ansatz liefert die Kettenregel der Differentialrechnung.

Ist

$$F(x) = f(g(x)),$$

so gilt

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Im oben angegebenen Beispiel erkennt man

$$g(x) = x^2 + x + 3 \text{ und } g'(x) = 2x + 1.$$

Man substituiert die innere Funktion, leitet sie ab und ersetzt die Integrationsvariable.

$$u = g(x) = x^2 + x + 3$$

$$u' = \frac{du}{dx} = (2x + 1) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{(2x + 1)} du$$

Das Integral wird zu

$$\int (2x + 1) (x^2 + x + 3)^4 dx = \int (2x + 1) u^4 \frac{1}{(2x + 1)} du = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C$$

Die Rücksubstitution liefert das Ergebnis

$$\int (2x + 1) (x^2 + x + 3)^4 dx = \frac{1}{5} (x^2 + x + 3)^5 + C.$$

Zur Kontrolle wird das Ergebnis abgeleitet.

$$\left[\frac{1}{5} (x^2 + x + 3)^5 + C \right]' = \frac{1}{5} \cdot 5(x^2 + x + 3)^4 (2x + 1) = (2x + 1)(x^2 + x + 3)^4$$

Die Ableitung stimmt mit dem Integranden überein.

Mithilfe der Integration durch Substitution lässt sich u. a. zeigen

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b) + C$$

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

