

Anleitung – Partielle Integration, Produktintegration

Produkte lassen sich nicht faktorweise integrieren. Wäre dem so, dann würde z. B. gelten

$$\int f(x) dx = \int x \cdot e^x dx = \int x dx \cdot \int e^x dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x + C = F(x)$$

Nun ist aber

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot e^x + C \right)' = \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \cdot e^x + \frac{1}{2} x^2 \cdot (e^x)' = x \cdot e^x + \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x \neq f(x)$$

Es muss also anders vorgegangen werden, um ein Produkt zu integrieren. Wie wäre es mit dem Umkehren der Ableitung eines Produkts? Die Produktregel der Differentialrechnung ist bekanntlich

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Werden beide Seiten integriert, so ergibt sich

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Eine Subtraktion führt zu einer geeigneten Formel, der Formel für die partielle Integration.

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Diese Formel lässt sich zur Integration von Produkten nutzen, wenn sich einer der Faktoren leicht ableiten und der andere leicht integrieren lässt, z. B.

$$\begin{array}{l} \int x \cdot e^x dx = \dots \\ \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow v(x) = e^x \end{array} \right. \\ \dots = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = (x - 1) \cdot e^x + C \end{array}$$

Zur Kontrolle wird das Ergebnis abgeleitet.

$$((x - 1) \cdot e^x + C)' = (x - 1)' \cdot e^x + (x - 1) \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + (x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x$$

Man könnte auch der Meinung sein, e^x lässt sich leicht ableiten und x leicht integrieren.

$$\begin{array}{l} \int x \cdot e^x dx = \int e^x \cdot x dx = \dots \\ \left| \begin{array}{ll} u(x) = e^x & \Rightarrow u'(x) = e^x \\ v'(x) = x & \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right. \\ \dots = e^x \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int e^x \cdot \frac{1}{2} x^2 dx = \dots? \end{array}$$

Keine gute Idee. Das Restintegral auf der rechten Seite ist nicht, wie gewünscht, einfacher, sondern schwieriger geworden.

Die richtige Wahl der Faktoren ist von entscheidender Bedeutung.



Mithilfe der partiellen Integration lassen sich auch Funktionen integrieren, die zwar nicht als Produkt vorliegen, sich aber als Produkt schreiben lassen.

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int \ln x \cdot 1 \, dx = \dots \\ \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow v(x) = x \end{array} \right. \\ \dots &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \cdot \ln x - x + C \end{aligned}$$

Manchmal ergibt sich als Restintegral das ursprüngliche Integral.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \dots \\ \left| \begin{array}{ll} u(x) = \sin x & \Rightarrow u'(x) = \cos x \\ v'(x) = \sin x & \Rightarrow v(x) = -\cos x \end{array} \right. \\ \dots &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cdot \cos x + x + C - \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Die Vereinigung des ursprünglichen mit dem Restintegral auf der linken Seite ergibt

$$\begin{aligned} 2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cdot \cos x + x + C \\ \Leftrightarrow \int \sin^2 x \, dx &= -\frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + C^* \end{aligned}$$

Mithilfe einfacher oder mehrfacher partieller Integration lässt sich u. a. zeigen

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + C \\ \int e^x \cdot \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + C \\ \int e^x \cdot \cos x \, dx &= \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x + \cos x) + C \\ \int x \cdot \sin x \, dx &= -x \cdot \cos x + \sin x + C \\ \int x \cdot \cos x \, dx &= x \cdot \sin x + \cos x + C \\ \int x^2 \cdot e^x \, dx &= (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + C \end{aligned}$$

