Übungsaufgaben – e-Funktion

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung.

a) $f(x) = 5x + e^x$

b) $g(x) = e^{\sin x}$

c) $h(x) = e^x \cdot e^{x+1} \cdot e^{x+2}$

d) $i(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 2\right) \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$.

a) Bilden Sie die ersten drei Ableitungen von f.

b) Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrempunkte sowie Wendepunkte.

3. Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = e^{-x} \cdot (e^x - a), x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte von f_a mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie a so, dass der Punkt $P(1|2)$ zum Graphen von f_a gehört.

4. Eine Biologin beobachtet das Wachstum einer Bakterienkultur, die in einer Petrischale mit $10cm$ Durchmesser wächst. Sie stellt fest, dass sich die von der Bakterienkultur bedeckte Fläche in cm^2 in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen zu Beginn modellhaft durch eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ berechnen lässt. Drei Tage nach Beginn der Beobachtung nimmt die Bakterienkultur eine Fläche von $4{,}234cm^2$ ein, nach fünf Tagen sind es $6{,}981cm^2$.

a) Ermitteln Sie die Parameter a und b, geben Sie die Funktionsgleichung von f an und wandeln Sie diese in eine Exponentialfunktion mit der Basis e um.

b) Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die die Bakterienkultur zu Beginn und nach einer Woche einnimmt.

c) Ermitteln Sie, wann die Bakterienkultur eine Fläche von $19cm^2$ einnimmt.

d) Die zeitliche Änderung der Größe der Fläche, die die Bakterienkultur einnimmt, bezeichnet man als Wachstumsgeschwindigkeit. Bestimmen Sie für $t = 10$ die Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur.

e) Zum Zeitpunkt $t = 10$ ändert die Biologin die Wachstumsbedingungen so, dass die Wachstumsgeschwindigkeit von da an konstant bleibt, die von den Bakterien eingenommene Fläche nunmehr linear wächst. Bestimmen Sie eine Funktion g, mit der sich ab dem zehnten Tag die von den Bakterien eingenommene Fläche berechnen lässt.

f) Ermitteln Sie, wann die Petrischale theoretisch komplett mit Bakterien bedeckt ist.

---

einige Lösungen:

1. $f'(x) = 5 + e^x$; $g'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$; $h'(x) = 3 \cdot e^{3x+3}$; $i'(x) = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$

2. $f'(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) \cdot e^x$; $f''(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right) \cdot e^x$; $f'''(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$; $S_x(4|0)$; $T\left(3\middle|-\frac{1}{2}e^3\right)$; $W(2|-e^2)$

3. $S_x(\ln a\,|0)$, $wenn\ a > 0$; $S_y(0|1-a)$; $a = -e$

4. $a = 2$; $b = 1{,}284$; $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}25\mathrm{t}}$; $f(7) = 11{,}51cm^2$; $t = 9d$; $f'(10) = 6{,}1cm^2/d$; $g(t) = 6{,}1t - 36{,}56$; $t = 18{,}9d$