Übungsaufgaben – Punkte, Geraden, Ebenen

1. Gegeben sind der Punkt $P(2|2|-1)$, die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E_1\colon x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$.

   a) Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene E_1 liegt, aber nicht auf der Geraden g.

   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E_1.

   c) Durch die Gerade g und den Punkt P wird eine Ebene E_2 aufgespannt. Bestimmen Sie eine Parameter-, eine Normalen- sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E_2.

2. Bestimmen Sie alle Spurpunkte und alle Spurgeraden der Ebene $E\colon 6x - 2y + 3z = -12$.

3. Die Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt S.

   $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{R}$

   a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S sowie den Schnittwinkel der beiden Geraden.

   b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung, eine Normalengleichung sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die durch die beiden Geraden aufgespannt wird.

4. Gegeben sind die Ebene $E\colon 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$, die Ebene $F\colon 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 18$, die Ebene $G\colon 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$ sowie die Gerade $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie die Lagebeziehungen der Geraden h zu den drei Ebenen E, F und G.

   b) Zeichnen Sie die Ebenen E und F in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   c) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $P(0|8|15)$ zur Ebene G sowie den Abstand der Ebene G zum Koordinatenursprung.

   d) Bestimmen Sie den Bildpunkt Q' bei der Spiegelung von $Q(3|8|7)$ an F.

5. Gegeben ist eine Ebenenschar $E_s\colon x + s \cdot y = 6, s \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $P(2|2|3)$.

   a) Stellen Sie die Ebenen E_1, E_2 und E_3 in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

   b) Beschreiben Sie die Lage der Ebenen im Raum.

   c) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes P zu den Ebenen E_1, E_2 und E_3.

   d) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Abstandes des Punktes P von einer beliebigen Ebene E_s der Ebenenschar an.

---

einige Lösungen:

1. $S(2|1|1)$; $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$; $3x - 2y - z = 3$
2. $S_x(-2|0|0)$; $S_y(0|6|0)$; $S_z(0|0|-4)$
3. $S(3|-1|8)$; $\alpha = 56{,}938°$; $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 14$; $-x + 7y + 3z = 14$
4. $h \cap E = h$; $h \cap F = \emptyset$; $h \cap G = S$ mit $S(-6|12|1)$; $Abst.(P, G) = 7{,}429$; $Abst.(0, G) = 0{,}286$; $Q'(-3|4|-5)$
5. $Abst.(P, E_1) = 1{,}414$; $Abst.(P, E_2) = 0$; $Abst.(P, E_3) = 0{,}632$; $Abst.(P, E_s) = \left|\frac{2s-4}{\sqrt{1+s^2}}\right|$